Проф. др Лазар Л. Милићевић и проф. др Стеван Р. Стевић,
Економски факултет у Брчком

ПРИМЈЕНА РАЧУНАРА ЗА ОПТИМАЛНО ОДРЕЂИВАЊЕ БРОЈА РАДНИКА У ПРОИЗВОДЊИ АРТИКАЛА КРАТКОГ ВИЈЕКА ТРАЈАЊА

Резиме:

Предмет овог рада је елаборација теоријских и методолошкkх поступака одређивања оптималног броја радника у производњи лакокварљивих артикала и робе чија вриједност брзо застаријева, као. нпр. пољопривредни н прехрамбени производи, дневна штампа и сл. Симулациона метода Монте Карло примијењена је на конкретном примјеру производње хљеба. Примијењена методологија састоји се од сљедећих методских корака: а) детермиисање проблема и предмета истраживања, б) дефинисање математичког модела (идентификација промјенљивих, параметара и њихове међусобне зависности в) извођење експеримента (избор функције расподјеле, случајни бројеви и промјевљиве, аритметичка средина, израчунавање функције критеријума) и г) тестирање и вредновање добијених рјешења.
Резултати тестирања добијени помоћу Колмогоров-Смирновљева теста потврђују добру праксу примјене савремене информационе технологије приликом извођења описаног облика експериментисања.
Кључие ријечи: симулација, случајни бројеви и промјенљиве, функција расподјеле, модели, експерименти, оптимизација.

APPLICATION OF COMPUTERS IN DETERMINING THE OPTIMAL NUMBER OF WORKERS IN PRODUCTION OF THE SHORT LIFE- TIME ARTICLES

Summary

The sabject of this work is the elaboration of the theory and methodological procedures in determining the optimal number of workers in production of the perishable articles and goods the value of which deteriorates rapidly, such as agricultural and food articles, daily press, etc. The simulation method of Monte Carlo has been applied in the concrete example of bread making. The applied methodology consists of the following steps; a) determination of the problem and the subject of the study; b) defining the mathematical model (variables identification, parameters and their interdependence; c) making experiments (selection of the distribution function, random numbers and variables, aritmetical mean, the calculation of the criteria function); d) testing and valorisation of the results obtained.

The results of the testing acquired by the Kolmogorov-Smirnov test confirm the sound practise of the modern information technology application in the course of the above-described form of experimentation.

Key words: similation, random numbers and variables, disiribution function, models, experiments, optimization.

УВОД

Овај рад се састоји од три структурна дијела: 1. дефинисање проблема и истраживања, 2. примјена симулационе методе Монте Карло на рјешавање проблема и 3. интерпретација и вредновање добијених резултата. Приложене су табеле симулиране производње, потрошње и њихове међусобне разлике у временском раздобљу од 50 дапа.

Извођење експеримента, а посебно израда табела, обављено је помоћу рачунара уз примјену софтверских рјешења заснованих. на програмском језику *Visual Basic* (*VB*). Случајни бројеви генерисани су помоћу *VB* функције *"Rnd"* и *"Int(Rnd*100)"*.

1. ДЕФИНИСАЊЕ ПРЕДМЕТА ИСТРАЖИВАЊА

Посматрано предузеће се бави производњом хљеба и учествује у подмирењу потреба града и околине за овом намирницом за преко 50% становника. Ово предузеће нема модерна аутоматизоваиа постројења за савремену производњу хљеба, па његова производња, у израженој мјери, зависи од броја радника који опслужују полуаутоматизоване машине и пећи за печење. На основу досадашњих искустава закључује се да се и са овом технологијом, уз добру организацију рада, може успјешно пословати, поготово што еу машине и пећи у добром производном стању, а инвестирање у скупу аутоматску опрему није изводљиво због недостатка финансијских средстава. Зато је циљ менаџмента предузећа да максимално снизи трошкове производње и на тај начин оствари што већу добит.

Овдје се покушава ријешити проблем оптимизације броја производних радника. Циљ менаџмента је да усклади производњу са потрошњом, јер се на сваком килограму произведеног, а непродатог хљеба губе 0,30 новчане јединице (продаја за сточну храну или сушење и мљевење за нову производњу). Познато је, такође, да се за сваки продати килограм хљеба остварује 0,10 новчана јединица. Испитивањем квалитета брашна и евиденцијом изостанака радника утврђено је да исти број радника, из дана у дан, производи различите количине хљеба због различитих производних вјештина, различитог квалитета брашна и одласка појединаца на боловање, те да производња варира између граница *м и М.*

У производњи хљеба битна је и чињеница да се, у случају недостатка овог артикла у продавницама, потрошачи не преоријентишу на друге произвођаче који су присутни иа овом тржишту. Продаја хљеба, иако варира у границама *м и М,* је релативно стабилна, јер флуктуација становништва није значајно изражена.

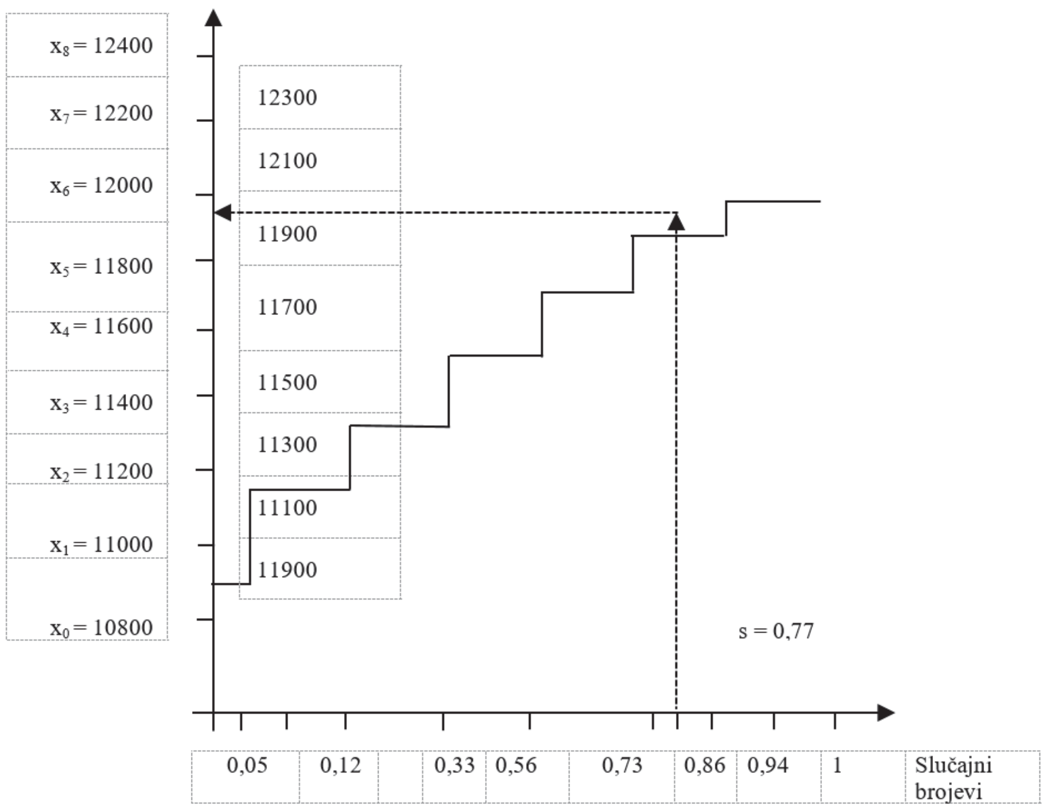
Код овог проблема егзистирају два процеса са различитим тенденцијама – различита производња и различита продаја (потражња). Рјешење проблема се може потражити у одређивању таквог броја производних радника при коме ће ове двије стохастичке промјенљиве (производња и продаја) бити релативно усклађене и при чему ће трошкови производње бити минимални. Функција критеријума у овом случају је:

$$T(x,y) = 0{,}3x + y \qquad 1.1.$$

гдје је x просјечна дневна непродата количина хљеба у килограмима, а *у* просјечни дневни недостатак хљеба у килограмима.

2. РЈЕШЕЊЕ ПРОБЛЕМА ПОМОЋУ СИМУЛАЦИОНЕ МЕТОДЕ МОНТЕ КАРЛО

Према књиговодственим подацима продаја хљеба у посљедњих 50 дана варирала је између *n - 10.800 кг* и *N - 12,400,* тј. највећа разлика била је *М~ м = 1,600 кг.* Укупна разлика дијели се на осам једнаких интервала (табела 1, колона 1), по 200 јединица (колона 2) и при томе сваком иитервалу придружује његова средња вриједност (колона 3), релативна фреквенција продаје и килограма хљеба из интервала (колона 4), кумулативна фреквенција (колона 5) и, на основу тих фреквенција, законитост по којој ће се случајним бројевима придруживати симулиране просјечне продаје (колона 6). На тај начин се долази до одређене степенасте функције расподјеле случајне промјенљиве *X* (продаја) ирема којој се расподјељују случајни бројеви генерисани *Visual Basic* функцијама *Rnd* и *Int*(*Rnd * 100),* табела 2. Тако распоређеним случајним бројевима додјељују се симулиране случајне промјенљиве (средње вриједности интервала симулиране просјечне потражње). Додијељене случајне бројеве представљају се на х-оси па, затим се придружују редом, сваком случајном броју, једна промјенљива, слика 1. Тако, на примјер, случајном броју 0,77 одговара случајна промјенљива 11900, тј. средња вриједност интервала 11800-12000, јер томе интервалу (0,73 – 0,85) припада случајни број 0,77 припада. Придруживањем тако сваком случајном броју, из табеле 2, по једне случајне промјенљиве добија се симулациони модел потражње у току 50 дана из кога се види да је средња симулирана потражња x = 11644 килограма на дан.



Слика 1.

Табела 1. Дневна продаја хљеба у периоду од 50 дана

РБ	Интервали	Средина иитервала	Релативна фреккенција	Кумулатнвна фреквкнинја	Закон придруживања	Просјечна дневна продаја
1	10800-1 1000	10900	0,05	0,05	00-04	
2	11000-11200	11100	0,12	0.17	05-46	
3	11200-31400	11300	0,16	0,33	17-32	
4	11.400-11600	11500	0,23	0,56	33-55	11572
5	11600-11800	11700	0,17	0,73	56-72	
6	1 1800-12000	11900	0,13	0,86	73-85	
7	12000-12200	12100	0,08	0,94	86-93	
8	12200-12400	12300	0,06	1,00	94-99	

Табела 2. Симулирана нотражња у периоду од 50 дана

Дани	Случајни бројеви	Придружена симулирана потражња	Дани	Случајни бројеви	Придружена симулирана потражња
1	95	12300	26	82	11900
2	32	11300	27	99	12300
3	82	11900	28	74	11900
4	77	11900	29	19	11300
5	81	11900	30	15	11900
6	94	12300	31	74	11700
7	67	11700	32	70	11700
8	88	12100	33	95	12300
9	68	11700	34	70	11700
10	95	12300	35	75	11900
11	87	12100	36	59	11700
12	68	11700	37	6	11100
13	14	11100	38	44	11500
14	69	11700	39	55	11500
15	1	10900	40	10	11100
16	34	11500	41	53	11500
17	48	11500	42	17	11300
18	80	11900	43	30	11300
19	68	11700	44	82	11900
20	13	11100	45	22	11300
21	22	11300	46	16	11100
22	49	11500	47	69	11700
23	45	11500	48	80	11900
24	61	11700	49	77	11900
25	9	11100	50	62	11700
Просјечна симулирана дневна потражња					11644

Производња хљеба са 13, 14 и 15 радника варирала је између 10300 - 11500, 10900 - 12100 и 11500 - 12640, респективно. Сви интервали дијеле се на шест једнаких дијелова, табела 3. На основу сређених података о дневној производњи сваком интервалу се придружује (слично као код потражње) средња дневна производња из интервала (колона 3), релативна фреквенција (колона 4), кумулативна фреквенција (колона 5), као и законитост помоћу које ће се случајним бројевима придруживати средње симулиране дневне количине произведеног хљеба (колона 6). Сада се, у сваком од три случаја, формира степенаста функција расподјеле случајне промјенљиве *X* према којој распоређујемо случајне бројеве. Тако распоређеним случајним бројевима додјељују се симулиране случајне промјенљиве (производња), односно средње вриједности из одговарајућих интервала на *y*-оси, табела 4.

Табела 3. Дневна производња хљеба у периоду од 50 дана
Остварена производња са 13 радника, табела 3-а

РБ	Итервали	Средина интервала	Релативна фреквенција	Кумулативна фреквенција	Закон придруживања	Просјечна дневна производња
1	10300-10500	10400	0,08	0,08	00-07	
2	10500-10700	10600	0,14	0,22	08-21	
3	10700-10900	10800	0,25	0,47	22-46	10916
4	10900-11100	11000	0,28	0,75	47-74	
5	11100-11300	11200	0,15	0,90	75-89	
6	11300- 11500	11400	0,10	1,00	90-99	

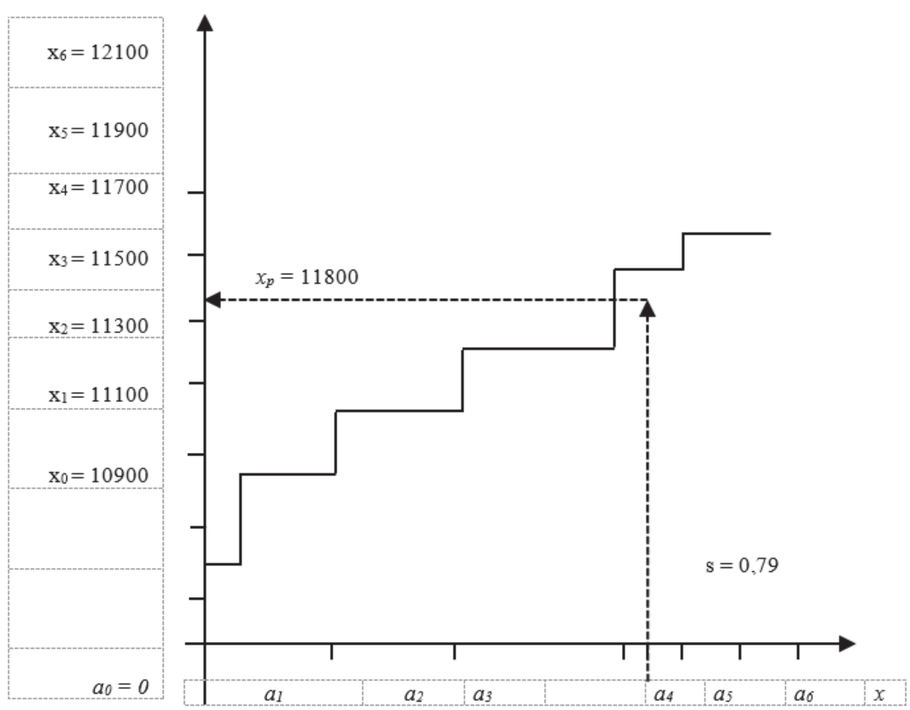
Остварена пронзвоња са 14 радника, табела 3-b

РВ	Интервали	Средина иктервала	Релативна фреквенција	Кумулативна фреквенција	Закон придруживања	Просјечна производња
1	10900-11100	11000	0,07	0,07	00-06	
2	11100-11300	11200	0,13	0,20	07-09	
3	11300-11500	11400	0,26	0,46	20-45	11526
4	11500-13700	11600	0,28	0,74	46-73	
5	11700-11900	11800	0,16	0,90	74-89	
6	11900-12100	12000	0,10	1,00	90-99	

Остварена пронзвоња са 15 радника, табела 3-с

РБ	Интервали	Среднна интервала	Релативна фреквенцнја	Кумулативна фреквенција	Закон придруживања	Просјечна дневна производња
1	11500- 11690	11595	0,08	0,08	00-07	
2	11690-11880	11785	0,13	0,21	08-20	
3	11880-12070	11975	0,27	0,48	21-47	12079,50
4	12070-12260	12165	0,29	0,77	48-76	
5	12260-12450	12355	0,14	0,91	77-90	
6	32450-12640	12545	0,09	1,00	91-99	

Додјељивање случајних промјенљивих случајним бројевима за производњу 14 радника цредстављено је графички. На х-осу се наносе расподијељени случајни бројеви у 6 интервала, према табели 3-б, а на у-осу 6 једнаких интервала са по 200 јединица од 10900 до 12100. Затим се генеришу случајни бројеви којима се придружују случајне промјенљиве. Ако се одабере један случајан број, на примјер 0,79, који припада интервалу 0,74-0,89 на *х-оси,* види се да томе интервалу одговара интервал 11700-11900 на у-оси, слика 2.



Слика 2.

Табела 4. Симулирана производња у току 50 дана

Дани	Случајни бројеви	Симулирана производња		
		13 радника	14 радника	15 радника
1	68	11000	11600	12165
2	31	10800	13400	11975
3	83	13200	11800	12355
4	19	10600	11700	11785
5	71	11000	11600	12165
6	32	10300	11400	11975
7	74	11000	11800	12165
8	13	10600	11200	11785
9	51	11000	11600	12165
10	95	11400	12000	12545
11	27	10800	11400	11975
12	63	10800	11600	11975
13	20	10600	11400	11785
14	11	10800	11200	11975
15	96	31400	12000	17545
16	79	11200	11800	11155
17	40	11200	11800	12355
18	57	11000	11600	12165
19	5	10400	11000	11535
20	30	10110	11400	11975
21	34	10110	11400	11975
22	96	11400	12000	12545
23	88	11200	11400	12355
24	52	11000	11600	12165
25	70	11000	11600	12165
26	68	11000	11600	12165
27	74	11000	11800	12165
28	21	10600	11400	11975
29	36	10800	31400	11975
30	82	11200	11810	12355
31	51	11000	11600	12165
32	32	10800	11400	11975
33	91	11400	12000	12545
34	36	10800	11400	11975
35	31	10800	11400	11975
36	19	11000	11200	12165
37	53	11000	11600	12165
3*	61	11000	11600	12165
39	85	11200	11800	12355
40	37	10800	11400	11975
41	69	11000	11600	11165
42	25	10800	11400	11975
43	2	10400	11000	11595
44	69	11000	11600	12165
45	56	11000	11600	12165
46	95	11400	12000	12545
47	67	11000	11600	12165
48	91	11400	12000	12545
49	57	11000	11600	12165
50	29	10800	11400	11975
Свега		548000	578400	606540
Просјечно дневно		10960,00	11568,00	12130,80

Одузимањем симулиране дневне потражње од симулиране дневне производње са 13, 14 и 15 радника засваки дан у току 50 дана утврђује се свакодневни вишак или мањак хљеба, табела 5.

Табела 5. Разлика између симулиране производње и потражње за 50 дана

Дани	За 13 радника	За 14 радника	За 15 радника
1	-1300	-700	-135
2	-500	100	675
3	-700	-100	455
4	-1300	-700	-115
5	-900	-300	265
6	-1500	-900	-325
7	-700	100	465
8	-1500	-900	-315
9	-700	-100	465
10	-900	-300	245
11	-1300	-700	-125
11	-900	-100	275
13	-500	300	685
14	-900	-500	275
15	500	1000	1645
16	-300	300	855
17	-300	300	855
18	-900	-300	265
19	-1300	-700	-105
20	-300	300	875
21	-500	100	675
22	-100	500	1045
23	-300	300	855
24	-700	-100	465
25	-100	500	1065
26	-900	-300	265
27	-1300	-500	-135
28	-1300	-500	75
29	-500	100	675
30	100	700	1255
31	-900	-300	265
32	-900	-300	27
33	-900	-300	245
34	-900	-300	275
35	-1100	-500	75
36	-700	-500	465
37	-100	500	1065
38	-500	100	665
39	-300	300	855
40	-300	300	875
41	-500	100	665
42	-500	100	675
43	-900	-300	295
44	-900	-300	265
45	-300	300	865
46	300	900	1445
47	-700	-100	465
48	-500	100	645
49	-900	-300	265
50	-900	-300	275
Вишак за 50 дана	900	7400	25595
Мањак за 50 дана	35100	-11200	1255
Просјечни дневни вишак	18	148	511,9
Просјечни дневни мањак	702	-224	25,1

Према функцији критеријума 1.1. ($T(x_3y) = 0{,}3x + y$) добијају се просјечни дневни губици:

за 13радника
$T(18;720)=0{,}3\cdot18+720 =$
$= 725{,}40$ н.ј.

за 14 радника
$T(148;224)=0{,}3\cdot148+224 =$
$268{,}40$ н.ј.

за 15радника
$T(511{,}9;25{,}1)=0{,}3\cdot511{,}9+25{,}1$
$= 178{,}67$ н.ј.

3. ИНТЕРПРЕТАЦИЈА И ВРЕДНОВАЊЕ ДОБИЈЕНИХ РЕЗУЛТАТА

Привидно, најмањи трошкови су када производи 15 радника. Међутим, када се додају плате и остале обавезе које се издвајају за једног радника (које су сигурно веће од разлике 268,40 - 178,67), може се закључити да ће пословање са 14 радника бити најуспјешније.

Препоручује се доносиоцима одлуке да у производњи учествује 15 радника без обзира на већа издвајања у односу на 14 радиика, јер купци, усљед већег недостатка хљеба, могу промијенити навике, па куповати хљеб од других произвођача. Са 15 радника нредузеће може лакше да поднесе изостанке са посла због боловања, а радници ће имати више могућности за одмор и рекреацију.

У случају да ради мање од 13 радника, недостајало би све више производа, расли би губици због неостварене зараде и губило би се повјерење купаца. Ако би радило више од 15 радника, расли би губици због непродатих количина, што за предузеће, такође, није повољно.

Понуђено рјешење тестирано је Колмогоров-Смирновим тестом да би се утврдило да ли су расподјела стварне производње *Fn1(x)* и расподјела симулиране производње *Fn2(x)* сагласне, односно да ли оба узорка припадају истој популацији. За ту сврху састављена је одговарајућа табела (табела 6).

Табела 6.

Интервали	Релативне фреквеиције		$Fn_1,(x)$	$Fn2(x)$	$Fn\,1(x)$- $Fn_2(x)$
	I	II			
10900-11100	0,07	0,04	0,07	0,04	0,03
11100-11300	0,13	0,08	0,20	0,12	0,08
11300-11500	0,26	0,28	0,40	0,40	0,06
13500-11700	0,28	0,32	0,74	0,72	0,02
11700-11900	0,16	0,16	0,90	0,88	0,02
11900-12100	0,10	0,12	1,00	1,00	0,00
Узорци	50	50	-	-	-

Из табеле се види да је $Dn_1,n_2 = max /Fn_1 (x) –Fn_2(x)/ = 0,08$

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \cdot Dn_1 n2 = \sqrt{\frac{50 \cdot 50}{50 + 50}} \cdot 0,08 = \ 0,04.$$

Према Q(λ) Колмогоров-Смирнов расподјели *добија* се да је Q(λ) = Q(0,49 = 0,0028, па је

$$P(Dn_1,n_2) = \sqrt{\frac{50 \cdot 50}{50 + 50}} \quad > 0,4 \ = 1 – 0,0028 = 0,9972$$

што значи да постоји висока сагласност.

На исти начин провјерава се и потражња. Формирана је табела 7, помоћу које се испитује сагласност расподјеле потрошње на основу података из документације и $Fn_1(x)$ и података добијених симулационим моделом $Fn_2(x)$.

Табела 7.

Интервали	**Релативне фреквенције**		***Fn1(x)***	***Fn2(x)***	***Fn1(x)- Fn2(x)***
	I	**II**			
10800-113000	0,05	0,02	0,05	0,02	0,03
11000-33200	0,12	014	0,17	0,16	0,01
11200-11400	0,16	0,12	0,33	0,28	0,05
11400-11600	0,23	0,14	0,56	0,42	0,14
11600-11800	0,17	0,12	0,73	0,64	0,09
11800-12000	0,13	0,22	0,86	0,86	0,00
12000-12200	0,08	0,04	0,94	0,90	0,04
12200-12400	0,06	0,10	1,00	1,00	0,00
Узорци	50	50	-	-	-

Из табеле 7 се види да је
$Dn_1,n_2 = max /Fn_1(x) – Fn_2(x)/ = 0,14$

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \cdot Dn_1 n2 = \sqrt{\frac{50 \cdot 50}{50 + 50}} \cdot 0,14 = .0,7.$$

Према Q(λ) Колмогоров-Смирнов Q(λ) = Q(0,7) = 0,2888 па је на основу 1.5.

$P(Dn_1,n_2\ )\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1+n_2}} > 0{,}7) = 1 - 0{,}2888 = 0{,}7112$

што значи да постоји сагласност између ове двије расподјеле, односно поуздано се може тврдити да симулирани узорак и узорак из документације припадају истој популацији.

4. ЛИТЕРАТУРА

1. Kohlas,J.: Monte Carlo Simulation in Operation Research, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
2. Komarnicki,J.: Simulationstechnik,VDI-Verlag GmbH, Dusseldorf ,1980.
3. Солдић Алексић, Ј.: Апликативни софтвер за статистичку анализу и табеларна израчунавања, Економски факултет, Београд, 1998.
4. Стевић, С., Милићевић, Л,, Радовановић, Л.: Примена методе Монте Карло у пословном одлучивању, Зборник радова СYМ-ОП-ИС 2000, Београд , октобар 2000.
5. Милићевић. Л, Стевић, С., Радовановић, Л: Теоријски и методолошки аспекти примене методе Монте Карло, 10. Конгрес математичара Југославије, Београд, јануар 2001.
6. Жижић, М., Ловрић, М,, Павличић, Д.: Методи статистичке анализе, Економски факултет, Београд, 1996.